	ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013	E_3.Μλ1A(a)

ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Βλέπε απόδειξη (1) σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.

A2. **a)** Βλέπε ορισμό σελίδα 72 σχολικού βιβλίου.
b) Βλέπε ορισμό σελίδα 57 σχολικού βιβλίου.

A3. **a)** Σωστό (βλέπε σελίδα 55 σχολικού βιβλίου.)
b) Λάθος (βλέπε σελίδα 69 σχολικού βιβλίου.)
 (Το Σωστό είναι ότι $\sqrt{a^2} = |a|$)
c) Λάθος (βλέπε σελίδα 79 σχολικού βιβλίου.)
 (Το Σωστό είναι ότι η εξίσωση $ax + b = 0$ είναι αδύνατη)
d) Σωστό (βλέπε σελίδα 62 σχολικού βιβλίου.)
e) Σωστό (βλέπε σελίδα 107 σχολικού βιβλίου.)

ΘΕΜΑ Β

B1. Για την παράσταση $\sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}}$ ισχύει:

$$\sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2} \quad (1)$$

οπότε η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

B2. Έχουμε:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (2-\sqrt{2}) + 1 \cdot (2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

 <p>ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ</p>	<p>ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</p>
<p>ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013</p>	<p>E_3.Μλ1A(a)</p>

- B3.** Στο ερώτημα B1 έχουμε αποδείξει ότι $A = 2$, οπότε η παράσταση του δεύτερου μέλους της εξίσωσης ισούται με:

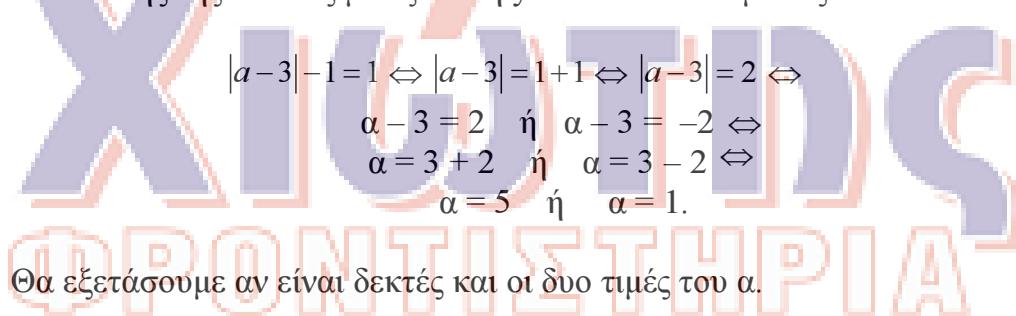
$$\frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} = B = 2$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$x^3 = \frac{1}{A+\sqrt{A}} + \frac{1}{A-\sqrt{A}} \Leftrightarrow x^3 = B \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Όταν δύο μη κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $|a-3|-1$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=x$ είναι 1. Επομένως



- Για $\alpha = 5$ η ευθεία ε γίνεται:
 $y = (|5-3|-1)x + (5^2 + 2|5|-3) \Leftrightarrow y = (|2|-1)x + (25 + 10 - 3) \Leftrightarrow y = x + 32$,
η οποία είναι παράλληλη με την $y=x$.
- Για $\alpha = 1$ η ε γίνεται:
 $y = (|1-3|-1)x + (1^2 + 2|1|-3) \Leftrightarrow y = (|-2|-1)x + (1 + 2 - 3) \Leftrightarrow y = x$
η οποία ταυτίζεται με την $y=x$. Άρα η τιμή $\alpha = 1$ απορρίπτεται.
Ωστε είναι $\alpha = 5$.

- Γ2.** Επειδή η γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα xx είναι οξεία, έχει εφω > 0 . Όμως, ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε) ισούται με την εφω, οπότε

$$|a-3|-1 > 0 \Leftrightarrow |a-3| > 1 \Leftrightarrow a-3 < -1 \quad \text{ή} \quad a-3 > 1 \Leftrightarrow \\ \alpha < 3-1 \quad \text{ή} \quad \alpha > 3+1 \Leftrightarrow \alpha < 2 \quad \text{ή} \quad \alpha > 4$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013

E_3.Mλ1A(a)

- Γ3.** Πρέπει και αρκεί οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύονται την εξίσωση της ευθείας. Για $x = y = 0$ η εξίσωση της ε δίνει:

$$0 = (|a - 3| - 1) \cdot 0 + (a^2 + 2|a| - 3) \Leftrightarrow a^2 + 2|a| - 3 = 0 \Leftrightarrow |a|^2 + 2|a| - 3 = 0$$

Θέτουμε:

$$|a| = \omega \geq 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση γίνεται:

$$\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$$

Αντή έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες τις

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

Είναι:

$$\omega_1 = \frac{-2 + 4}{2} = 1, \quad \omega_2 = \frac{-2 - 4}{2} = -3 \text{ που απορρίπτεται.}$$

Για $\omega = 1$ η (1) δίνει

$$|\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = -1$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Το τριώνυμο έχει $\alpha = 4$, $\beta = -4\lambda$, $\gamma = 5\lambda$ και διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4\lambda)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5\lambda = 16\lambda^2 - 80\lambda$$

Είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 80\lambda = 0 \Leftrightarrow 16\lambda(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 5.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013

E_3.Mλ1A(a)

Το πρόσημο της διακρίνουσας φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

λ	$-\infty$	0	5	$+\infty$
Δ	+	0	-	0

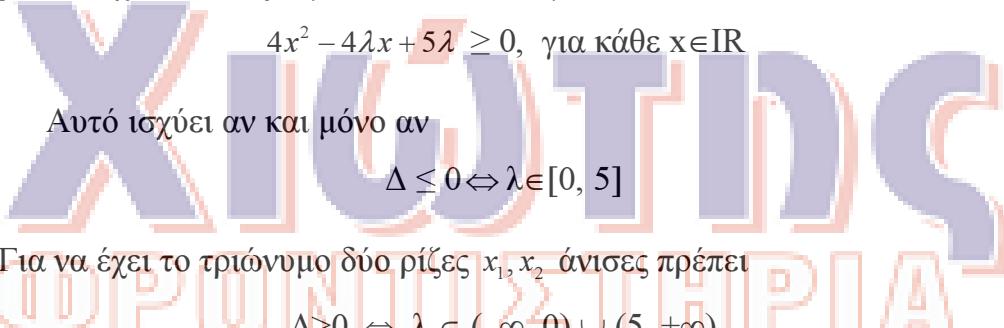
Επομένως για $\lambda = 0$ ή $\lambda = 5$ είναι $\Delta = 0$ και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty) \text{ ενώ } \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 5)$$

- Δ2.** α. Το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

- β. Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} αν και μόνο αν



- Δ3.** Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες x_1, x_2 άνισες πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$$

Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-4\lambda)}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{4\lambda}{4} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \lambda$$

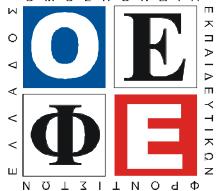
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{5\lambda}{4}$$

Επομένως

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\lambda}{4} - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 5\lambda - 4 \Leftrightarrow 5\lambda - 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

Όμως το $4 \notin (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$, επομένως δεν υπάρχει τιμή του λ , ώστε να είναι

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 1$$

	ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ (Ο.Ε.Φ.Ε.) – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ	
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013		E_3.Μλ1A(a)

Δ4. Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και A' είναι

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq P(A') \leq 1$$

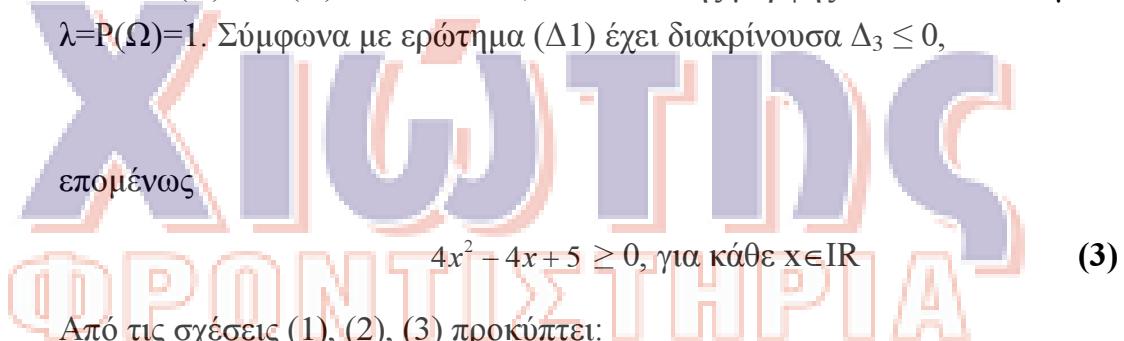
- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(A)$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 \leq 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A)x + 5P(A) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- Το τριώνυμο $4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')$ είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(A')$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 \leq 0$, επομένως

$$4x^2 - 4P(A')x + 5P(A') \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- Για την πιθανότητα του δειγματικού χώρου Ω είναι $P(\Omega) = 1$. Έτσι $4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega) = 4x^2 - 4x + 5$, που είναι της μορφής $4x^2 - 4\lambda x + 5\lambda$ με $\lambda = P(\Omega) = 1$. Σύμφωνα με ερώτημα (Δ1) έχει διακρίνουσα $\Delta_3 \leq 0$,



$$[4x^2 - 4P(A)x + 5P(A)][4x^2 - 4P(A')x + 5P(A')][4x^2 - 4P(\Omega)x + 5P(\Omega)] \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$